7. VEKTORSKA ANALIZA

PREGLED TEORIJE

7.1. Ako je u oblasti V definisana funkcija

$$U=U(T)=U(x, y, z) \qquad (T(x, y, z)\in V), \tag{1}$$

tada kažemo da je zadano skalarno polje. Uz određene pretpostavke o funkciji (1) relacija

$$U(x, y, z)=C \tag{2}$$

predstavlja neku površ. Ta površ zove se ekviskalarna površ ili nivo-površ skalarnog polja (1).

7.2. Ako je $T_0(x_0, y_0, z_0)$ zadana unutrašnja tačka iz V, a

$$\vec{e}=\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta\,\vec{j}+\cos\gamma\,\vec{k} \tag{3}$$

zadan jedinični vektor, tada je relacijom

$$f(t)=U(x_0+t\cos\alpha,\ y_0+t\cos\beta,\ z_0+t\cos\gamma) \tag{4}$$

definisana funkcija $f(t)$ u nekoj okolini tačke $t=0$. Ukoliko je funkcija (1) diferencijabilna u tački T_0, tada funkcija (4) ima izvod

$$f'(t)_{t=0}=U_x'(x_0, y_0, z_0)\cos\alpha+U_y'(x_0, y_0, z_0)\cos\beta+$$
$$+U_z'(x_0, y_0, z_0)\cos\gamma=\operatorname{grad}(U)\cdot\vec{e}. \tag{5}$$

Pri tome je

$$\operatorname{grad}(U)=U_x'\,\vec{i}+U_y'\,\vec{j}+U_z'\,\vec{k}. \tag{6}$$

Izraz (5) zove se izvod funkcije (1) u tački T_0 u smjeru jediničnog vektora $\vec{e}$ i označava se sa $\dfrac{\partial U}{\partial \vec{e}}$. Prema tome,

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{e}}=\operatorname{grad}(U)\cdot\vec{e}. \tag{7}$$

Izraz (5) mjeri brzinu promjene funkcije (4) u tački $t=0$. Dakle, izraz (6) mjeri brzinu promjene funkcije (1) u tački T_0 i to u smjeru vektora $\vec{e}$. Odmah se vidi da je ta brzina najveća kad se smjer vektora $\vec{e}$ podudara sa smjerom vektora (6).

Iz relacije (2) slijedi $dU=0$, tj

$$\operatorname{grad}(U)\cdot d\vec{r}=0$$

odakle se (još jednom) vidi da vektor (6) predstavlja (neobavezno jedinični) vektor normale na ekviskalarnoj površi (2).

7.3. Uvođenjem diferencijalnog operatora nabla (Hamilton)

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \tag{8}$$

može se za svaku diferencijabilnu funkciju $U(x, y, z)$ pisati

$$\operatorname{grad}(U)=\nabla U. \tag{9}$$

Operator nabla ima sljedeće osobine:

$$\begin{aligned}&\nabla(U+V)=\nabla(U)+\nabla(V)\\&\nabla(C\cdot U)=C\cdot\nabla(U)\\&\nabla(U\cdot V)=U\cdot\nabla(V)+V\cdot\nabla(U).\end{aligned} \tag{10}$$

7.4. Ako je u oblasti V definisana vektorska funkcija

$$\vec{F}=\vec{F}(T)=P(x, y, z)\vec{i}+Q(x, y, z)\vec{j}+R(x, y, z)\vec{k}, \tag{11}$$

gdje je $T(x, y, z)\in V$, tada se kaže da je zadano vektorsko polje.

Ako je zadano skalarno polje (1), onda uz pretpostavku da je funkcija $U(x, y, z)$ diferencijabilna imamo vektorsko polje

$$\vec{F}=\operatorname{grad}(U). \tag{12}$$

Vektorsko polje (12) zove se potencijalno polje; skalarno polje (1) je (skalarni) potencijal tog polja.

Primijetimo da je (skalarni) potencijal potencijalnog polja određen samo do aditivne konstante.

7.5. Ako kriva $\vec{r}=\vec{r}(t)$ ima osobinu da u svakoj svojoj tački dira vektor vektorskog polja (11) pridružen toj tački, tada se ta kriva zove vektorska linija polja (11). U slučaju polja sila vektorske linije polja nazivaju se silnice.

Vektorske linije polja (11) su rješenje sistema diferencijalnih jednačina

$$\frac{dx}{P(x, y, z)}=\frac{dy}{Q(x, y, z)}=\frac{dz}{R(x, y, z)}\;(=dt). \tag{13}$$

7.6. Uz prirodne pretpostavke o njegovim komponentama P, Q i R, diferencijalni operator nabla može se primijeniti i na vektorsko polje (11). Kako je tom operatoru data uloga vektora, može še to učiniti na dva načina: skalarnim i vektorskim množenjem. Tako se dolazi do sljedeća dva diferencijalna operatora prvog reda koji se primjenjuju na vektore. Skalarnim množenjem dobijamo operator divergencije

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z}. \tag{14}$$

Vektorskim množenjem dobijamo operator rotor (rotacija):

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \qquad (1$$

Operator divergencije ima ove osobine:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{F}+\vec{G}) &= \operatorname{div}(\vec{F}) + \operatorname{div}(\vec{G}) \\ \operatorname{div}(U \cdot \vec{F}) &= U \cdot \operatorname{div}(\vec{F}) + \vec{F} \cdot \operatorname{grad}(U) \\ \operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) &= \nabla(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot (\nabla \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\nabla \times \vec{G}) \\ &= \vec{G} \cdot \operatorname{rot}(\vec{F}) - \vec{F} \cdot \operatorname{rot}(\vec{G}). \end{aligned} \tag{16}$$

Pomoću operatora divergencije može se prikazati

$$\operatorname{grad}(\vec{F} \cdot \vec{G}) = \vec{F} \times \operatorname{rot}\vec{G} + \vec{G} \times \operatorname{rot}\vec{F} + (\vec{F}\,\nabla)\,\vec{G} + (\vec{G}\,\nabla)\,\vec{F} \tag{17}$$

Za operator rotor imamo:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\vec{F}+\vec{G}) &= \operatorname{rot}(\vec{F}) + \operatorname{rot}(\vec{G}) \\ \operatorname{rot}(U \cdot \vec{F}) &= U \cdot \operatorname{rot}(\vec{F}) - \vec{F} \times \operatorname{grad}(U) \\ \operatorname{rot}(\vec{F} \times \vec{G}) &= \nabla \times (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot (\nabla \cdot \vec{F}) - (\vec{G} \cdot \nabla)\,\vec{F} \\ &\quad - \vec{F} \cdot (\nabla \cdot \vec{G}) + (\vec{F} \cdot \nabla)\,\vec{G}. \end{aligned} \tag{18}$$

Pri tome je uveden operator

$$(\vec{F} \cdot \nabla) = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y} + R\frac{\partial}{\partial z} \tag{19}$$

koji se na vektor

$$\vec{G} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$$

primjenjuje ovako:

$$(\vec{F}\cdot\nabla)\vec{G}=\left(P\cdot\frac{\partial X}{\partial x}+Q\cdot\frac{\partial X}{\partial y}+R\cdot\frac{\partial X}{\partial z}\right)\vec{i}+$$

$$+\left(P\cdot\frac{\partial Y}{\partial x}+Q\cdot\frac{\partial Y}{\partial y}+R\cdot\frac{\partial Y}{\partial z}\right)\vec{j}+ \tag{20}$$

$$+\left(P\cdot\frac{\partial Z}{\partial x}+Q\cdot\frac{\partial Z}{\partial y}+R\cdot\frac{\partial Z}{\partial z}\right)\vec{k}.$$

7.8. Ako funkcija (1) ima izvode do zaključno drugog reda, tada na vektorsko polje grad (U) možemo primijeniti svaki od operatora div i rot. Primjenom operatora div dobijamo (Laplasov operator):

$$\Delta(U)=\nabla^2(U)=\nabla(\nabla U)=\operatorname{div}(\operatorname{grad}(U))=$$

$$=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \tag{21}$$

Primjenom operatora rot, uz pretpostavku da su mješoviti drugi izvodi funkcije U međusobno jednaki, dobijamo

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad}(U))=\vec{0}. \tag{22}$$

Za potencijalno polje $\vec{F}$, dakle, vrijedi

$$\operatorname{rot}(\vec{F})=\vec{0} \tag{23}$$

ukoliko su komponente polja $\vec{F}$ takve da imaju neprekidne prve parcijalne izvode. Kasnije ćemo vidjeti da zapravo vrijedi i obrnuta tvrdnja.

7.9. Ako komponente vektorskog polja $\vec{G}$ imaju parcijalne izvode do zaključno drugog reda, tada na vektorsko polje rot $(\vec{G})$ možemo primijeniti operator div i operator rot. Primjenom operatora div dobijamo

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{G})=0 \tag{24}$$

ukoliko su odgovarajući drugi mješoviti izvodi komponenata polja $\vec{G}$ međusobno jednaki, što je sigurno slučaj kad su ti mješoviti izvodi neprekidni.

Za vektorsko polje

$$\vec{F}=\operatorname{rot}(\vec{G}) \tag{25}$$

kaže se da je solenoidalno. Uz određene pretpostavke za solenoidalno polje (25), prema (24), vrijedi

$$\operatorname{div}(\vec{F})=0. \tag{26}$$

Za solenoidalno vektorsko polje (25) polje

$$\vec{G} = X(x, y, z)\,\vec{i} + Y(x, y, z)\,\vec{j} + Z(x, y, z)\,\vec{k} \tag{27}$$

zove se vektorski potencijal polja $\vec{F}$. Vektorski potencijal solenoidalnog polja nije jednoznačno određen, jer ako (25) vrijedi za $\vec{G}$, tada ta relacija vrijedi i za vektorsko polje $\vec{G} + \operatorname{grad}(U)$, pri čemu je U bilo koje skalarno polje koje ima (neprekidne) izvode drugog reda. Za svako vektorsko polje (11) za koje vrijedi (25) i čije komponente imaju neprekidne parcijalne izvode postoji vektorski potencijal (27) za koji je čak $Z(x, y, z) = 0$. Preostale dvije komponente polja $\vec{G}$ su rješenje sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina

$$\frac{\partial X}{\partial z} = -P, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = Q, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = R. \tag{28}$$

321. Pokazati da je $\vec{a}\cdot d\vec{a}=|\vec{a}|\cdot d(|\vec{a}|)$

za svaku vektorsku funkciju $\vec{a}$.

Rješenje. $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}| \Rightarrow \vec{a}\cdot d\vec{a}=|\vec{a}|\cdot d(|\vec{a}|)$.

322. Pokazati da iz jednakosti $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{r}f(r)$ slijedi $\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{c}$.

Rješenje. Pomnožimo datu jednakost vektorski sa $\vec{r}$. Dobićemo

$$\vec{r}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{r}\times\vec{r}f(r)=0,$$

tj.

$$d\left(\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right)=0$$

dakle,

$$\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{c}.$$

323. Odrediti ekviskalarne površi funkcije:

a) $f(\vec{r})=|\vec{r}|$, b) $f(\vec{r})=x^2+y^2-z$, c) $f(\vec{r})=x^2+y^2-z^2$,
d) $f(\vec{r})=xy$.

Rjcšenje. Ekviskalarne površi su: a) sfere $|\vec{r}|=c$, tj. $x^2+y^2+z^2=c^2$.
b) Paraboloidi $x^2+y^2-z=c$, tj. $z=x^2+y^2-c$.

c) Konusi $x^2+y^2=z^2+c$.

d) Cilindri $y=\frac{c}{x}$.

Odrediti vektorske linije vektorskog polja $\vec{a}$:

324. $\vec{a}=\frac{\vec{r}}{r^3}$, $(r=|\vec{r}|)$. **325.** $\vec{a}=\vec{c}\times\vec{r}$ $(\vec{c}=\text{const})$.

326. $\vec{a}=(x^2-y^2-z^2)\vec{i}+2xy\vec{j}+2xz\vec{k}$.

327. $\vec{a}=x(y-z)\vec{i}+y(z-x)\vec{j}+z(x-y)\vec{k}$.

Rješenja:

324. Diferencijalne jednačine vektorskih linija su

$$\frac{dx}{a_1}=\frac{dy}{a_2}=\frac{dz}{a_3},$$

tj. u ovom slučaju

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}.$$

Vektorske linije su, dakle, prave $y=C_1x$, $z=C_2x$.

325. Diferencijalnu jednačinu vektorskih linija napisaćemo u obliku

$$d\vec{r}=\vec{a}\cdot\lambda,$$

tj.

$$d\vec{r}=(\vec{c}\times\vec{r})\cdot\lambda. \tag{1}$$

Množeći jednačinu (1) jedanput sa $\vec{c}$, a drugi put sa $\vec{r}$ dobija se

$$\vec{r}\cdot d\vec{r}=0, \tag{2}$$

$$\vec{c}\cdot d\vec{r}=0. \tag{3}$$

Iz (2) se dobija $d(\vec{r}^2)=0$, a iz (3) $d(\vec{c}\cdot\vec{r})=0$. Vektorske linije su, dakle, kružnice $\vec{r}\cdot\vec{r}=C_1$, $\vec{c}\cdot\vec{r}=C_2$.

326. Vektorske linije su integralne krive sistema

$$\frac{dx}{x^2-y^2-z^2}=\frac{dy}{2xy}=\frac{dz}{2xz}.$$

To su krive:

$$\frac{z}{y}=C_1,\quad \frac{x^2+y^2+z^2}{y}=C_2.$$

327. $x+y+z=C_1$, $\qquad xyz=C_2$.

328. Odrediti gradient funkcije $f(x,y,z)=3x^2-3y^2+z^2-2xyz$ u tački $(1, 1, 0)$.

Rješenje. grad $f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$,

$$\text{grad } f=(6x-2yz)\vec{i}+(-6y-2xz)\vec{j}+(2z-2xy)\vec{k},$$

$$\text{grad } f(1,\ 1,\ 0)=6\vec{i}-6\vec{j}-2\vec{k}.$$

329. Odrediti gradient skalarnog polja $f(\vec{r})=x^3+y^3+z^3-3xyz$ u tački (2, 1, 1). U kojim tačkama je grad $f(\vec{r})=0$, a u kojima $\vec{k}\cdot\text{grad } f(\vec{r})=0$?

Rješenje.

grad $f=(3x^2-3yz)\vec{i}+(3y^2-3xz)\vec{j}+(3z^2-3xy)\vec{k}$.

grad $f(2,\ 1,\ 1)=9\vec{i}-3\vec{j}-3\vec{k}$.

grad $f=0 \Leftrightarrow 3x^2-3yz=0,\quad 3y-3xz=0,\quad 3z^2-3xy=0.$

Množenjem prve jednačine sa x, druge sa y, treće sa z i oduzimanjem dobija se

grad $f=0 \Leftrightarrow x^3=y^3,\ x^3=z^3$,

odnosno, grad $f=0$ duž prave $x=y=z$.

$\vec{k}\cdot\text{grad } f=0$ ako je $3z^2-3xy=0$, tj. $z=\pm\sqrt{xy}$.

330. Dato je skalarno polje $f(\vec{r})=\ln\frac{1}{r}$, gdje je $r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$, a $A(a,\ b,\ c)$ neka fiksna tačka. U kojim tačkama prostora $Oxyz$ je $|\text{grad } f|=1$?

Rješenje. $|\vec{r}|=r=1$.

331. Dokazati da je

a) grad $(u\cdot v)=u$ grad $v+v$ grad u

b) grad $\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\text{ grad } u-u\text{ grad } v}{v^2}$

c) grad $f(u)=f'(u)$ grad u.

332. Odrediti grad $f(r)$.

Rješenje.

grad $f(r)=f'(r)\cdot$ grad r.

Kako je, s jedne strane, $dr=\text{grad } r\cdot d\vec{r}$ a, s druge strane, $r\,dr=\vec{r}\,d\vec{r}$, tj. $dr=\frac{\vec{r}}{r}\cdot d\vec{r}$, to slijedi

$$\text{grad } r=\frac{\vec{r}}{r}.$$

Sada je $\operatorname{grad} f(r) = f'(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r}$.

Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ konstantni vektori, a $\vec{r}$ vektor položaja tačke $M(x, y, z)$, $(\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$, dokazati da je:

333. $\operatorname{grad} \frac{(\vec{a} \cdot \vec{r})}{(\vec{b} \cdot \vec{r})} = \frac{\vec{r} \times (\vec{a} \times \vec{b})}{(\vec{b} \cdot \vec{r})^2}$, **334.** $\operatorname{grad} (\vec{a} \times \vec{r})^2 = 2[(\vec{a} \times \vec{r}) \times \vec{a}]$.

Rješenja:

333. $\operatorname{grad} \frac{(\vec{a} \cdot \vec{r})}{(\vec{b} \cdot \vec{r})} = \frac{(\vec{b} \cdot \vec{r}) \cdot \operatorname{grad} (\vec{a} \cdot \vec{r}) - (\vec{a} \cdot \vec{r}) \operatorname{grad} (\vec{b} \cdot \vec{r})}{(\vec{b} \cdot \vec{r})^2} =$

$$= \frac{(\vec{b} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{b}}{(\vec{b} \cdot \vec{r})^2}$$

jer je $\operatorname{grad} (\vec{a} \cdot \vec{r}) = \vec{a}$. Koristeći jednakost za dvostruki vektorski proizvod

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \cdot \vec{A}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

slijedi data jednakost.

334. Gradient ćemo odrediti pomoću jednakosti

$$d f = \operatorname{grad} f \cdot d\vec{r}. \tag{1}$$

Za $f = (\vec{a} \times \vec{r})^2$ biće

$$d f = 2(\vec{a} \times \vec{r}) \cdot (\vec{a} \times d\vec{r}). \tag{2}$$

Kako za mješoviti proizvod $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ važi

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}),$$

to iz (2) slijedi

$$d f = 2[(\vec{a} \times \vec{r}) \times \vec{a}] \cdot d\vec{r}. \tag{3}$$

Upoređivanjem (1) i (3) slijedi data jednakost.

335. Pokazati da je

$$\Delta(u \cdot v) = u \Delta v + v \Delta u + 2(\nabla u) \cdot (\nabla v),$$

pri čemu je

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

a

$$\Delta = \nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right).$$

336. Pokazati da je $\Delta \frac{1}{r} = 0.$

Naći izvod funkcije $f(x, y, z)$ u pravcu vektora $\vec{e}$ u tački M.

337. $f(x, y, z) = x^2 + yz,\ \vec{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma),\ M(0, 0, 1).$

338. $f(x, y, z) = x + x^2 y + y^2 z,\ \vec{e} = \vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k},\ M(1, 1, 1).$

339. $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2},\ \vec{e} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},\ M(x, y, z).$

340. $f(x, y, z),\ \vec{e} = \operatorname{grad} f,\ M(x, y, z).$

Rješenja:

337. Izvod funkcije f u pravcu (jediničnog) vektora $\vec{e}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ je

$$\frac{df}{d\vec{e}} = \operatorname{grad} f \cdot \vec{e} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma.$$

Kako je $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial f}{\partial y} = z,\ \frac{\partial f}{\partial z} = y$, to je

$$\frac{df}{d\vec{e}} = 2x\cos\alpha + z\cos\beta + y\cos\gamma.$$

U datoj tački $M(0, 0, 1)$ je

$$\frac{df(M)}{d\vec{e}} = \cos\beta.$$

338. Kako $\vec{e}$ nije jedinični vektor, to je

$$\frac{df}{d\vec{e}} = \operatorname{grad} f \cdot \frac{\vec{e}}{|\vec{e}|}.$$

Znači,

$$\frac{df}{d\vec{e}} = (1 + 2xy)\cdot\frac{1}{\sqrt{19}} + (x^2 + 2yz)\cdot\frac{3}{\sqrt{19}} + y^2\cdot\frac{3}{\sqrt{19}},$$

a datoj tački $M(1,\ 1,\ 1)$

$$\frac{d\,f(M)}{d\vec{e}}=\frac{15}{\sqrt{19}}.$$

339. Kako je $\operatorname{grad} f(r)=2\left(\frac{x}{a^2}\vec{i}+\frac{y}{b^2}\vec{j}+\frac{z}{c^2}\vec{k}\right)$,

to je

$$\frac{d\,f(\vec{r})}{d\vec{r}}=\operatorname{grad} f(\vec{r})\cdot\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}=2\left(\frac{x}{a^2}\vec{i}+\frac{y}{b^2}\vec{j}+\frac{z}{c^2}\vec{k}\right)\cdot\frac{(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})}{|\vec{r}|}=$$

$$=2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\frac{1}{|\vec{r}|}=\frac{2f(\vec{r})}{|\vec{r}|}.$$

340. $\dfrac{d\,f(M)}{d(\operatorname{grad} f)}=\operatorname{grad} f(M)\cdot\dfrac{\operatorname{grad} f(M)}{|\operatorname{grad} f|}=|\operatorname{grad} f(M)|.$

Po definiciji odrediti izvod funkcije:

341. $f(x,\ y)=\sqrt{x^2+y^2}$ u pravcu $\vec{e}=(\cos\alpha,\ \cos\beta)$ u tački $(0,\ 0)$.

342. $f(r)=\vec{a}\cdot\vec{r}$ u proizvoljnom pravcu $\vec{e}$ u tački $M(x,\ y,\ z)$.

Rješenja:

341. Prema definiciji

$$\frac{df}{d\vec{e}}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(M)-f(O)}{\rho}\ (\rho=\overline{OM}).$$

Kako je $f(M)=f(\rho\cos\alpha,\ \rho\ \mathrm{gos}\,\beta)=\sqrt{\rho^2}$, $f(O)=0$,
to je

$$\frac{df}{d\vec{e}}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\sqrt{\rho^2}}{\rho}=1.$$

342. $$\frac{d\,f(\vec{r})}{d\vec{e}}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(\vec{r}+\rho\vec{e})-f(\vec{r})}{\rho}=$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{\vec{a}\cdot(\vec{r}+\rho\vec{e})-\vec{a}\cdot\vec{r}}{\rho}=$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{\vec{a}\cdot\rho\vec{e}}{\rho}=\vec{a}\cdot\vec{e}.$$

Dakle, izvod ne zavisi od tačke, nego samo od smjera u kome se traži.

343. Ako je $f(x, y, z)$ skalarna, a $\vec{a}(x, y, z)$ vektorska funkcija, onda je $\operatorname{div}(f \cdot \vec{a}) = f \cdot \operatorname{div} \vec{a} + \vec{a} \cdot \operatorname{grad} f$. Dokazati.

Rješenje. $\nabla \cdot (f \cdot \vec{a}) = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (f\, a_1 \vec{i} + f \cdot a_2 \vec{j} + f\, a_3 \vec{k}) =$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(f\, a_1) + \frac{\partial}{\partial y}(f\, a_2) + \frac{\partial}{\partial z}(f\, a_3) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot a_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot a_2 + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot a_3 + f \cdot \left(\frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z}\right) =$$

$$= \vec{a} \cdot \operatorname{grad} f + f \cdot \operatorname{div} \vec{a}.$$

344. Odrediti skalarnu funkciju $f(r)$ tako da bude $\operatorname{div}[f(r) \cdot \vec{r}] = 0$.

Rješenje. Na osnovu zadatka 343. biće

$$\operatorname{div}[f(r) \cdot \vec{r}] = 3 f(r) + \vec{r} \cdot \operatorname{grad} f(r) = 3 f(r) + f'(r) \cdot r.$$

Iz

$$3 f(r) + f'(r) \cdot r = 0$$

dobija se $f(r) = \dfrac{C}{r^3}$.

345. Pokažati da je $\operatorname{div}(f \operatorname{grad} \varphi) = f \Delta\varphi + \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} \varphi$.

Pokazati da je

346. $\operatorname{rot}(\vec{a} + \vec{b}) = \operatorname{rot} \vec{a} + \operatorname{rot} \vec{b}$.

347. $\operatorname{rot}(f \cdot \vec{a}) = f \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \times \operatorname{grad} f$.

Rješenje. 347.

$$\operatorname{rot}(f \vec{a}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f a_1 & f a_2 & f a_3 \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial (f a_3)}{\partial y} - \frac{\partial (f a_2)}{\partial z}\right] \vec{i} +$$

$$+ \left[\frac{\partial (f a_1)}{\partial z} - \frac{\partial (f a_3)}{\partial x}\right] \vec{j} + \left[\frac{\partial (f a_2)}{\partial x} - \frac{\partial (f a_1)}{\partial y}\right] \vec{k} =$$

$$= f\left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z}\right) \vec{i} + f\left(\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x}\right) \vec{j} + f\left(\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y}\right) \vec{k} +$$

$$+\left(a_3\frac{\partial f}{\partial y}-a_2\frac{\partial f}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(a_1\frac{\partial f}{\partial z}-a_3\frac{\partial f}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(a_2\frac{\partial f}{\partial x}-a_1\frac{\partial f}{\partial y}\right)\vec{k}=$$

$$=f\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z}\end{vmatrix},$$

odakle slijedi tvrdnja.

Ovo izvođenje date jednakosti može se sprovesti u kondenzovanom obliku:

$$\operatorname{rot}(f\vec{a})=\nabla\times(f\vec{a})=\nabla\times(\overset{*}{f}\vec{a})+\nabla\times(f\overset{*}{\vec{a}})=$$

$$=(\nabla f)\times\vec{a}+f\cdot(\nabla\times\vec{a})=f\cdot\operatorname{rot}\vec{a}-\vec{a}\times\operatorname{grad} f.$$

Oznaka * iznad slova označava da se u proizvodu operator ∇ primjenjuje na naznačenu funkciju. Tako u izrazu $\nabla\times(f\overset{*}{\vec{a}})$ operator ∇ primjenjuje se samo na $\vec{a}$; pri tome se uzima f kao konstantan činilac, pa se iznosi ispred znaka ∇.

Pokazati da je:

348. $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a}-\vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}.$

349. $\operatorname{rot}(\vec{a}\times\vec{b})=(\vec{b}\,\nabla)\cdot\vec{a}-(\vec{a}\,\nabla)\,\vec{b}-\vec{b}\operatorname{div}\vec{a}+\vec{a}\operatorname{div}\vec{b}.$

350. $\operatorname{grad}(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\times\operatorname{rot}\vec{b}+\vec{b}\times\operatorname{rot}\vec{a}+(\vec{a}\,\nabla)\,\vec{b}+(\vec{b}\,\nabla)\,\vec{a}.$

351. $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f)=\vec{0}.$

352. $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{a})=0.$

Rješenja:

348. $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b})=\nabla(\vec{a}\times\vec{b})=\nabla(\overset{*}{\vec{a}}\times\vec{b})+\nabla(\vec{a}\times\overset{*}{\vec{b}})=\vec{b}(\nabla\times\vec{a})-\vec{a}\cdot(\nabla\times\vec{b}).$

Pri prelazu na posljednju jednakost iskorišćena je osobina mješovitog proizvoda

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})=\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}).$$

349. $\operatorname{rot}(\vec{a}\times\vec{b})=\nabla\times(\vec{a}\times\vec{b})=\nabla\times(\vec{a}\times\vec{b})-\nabla\times(\vec{b}\times\vec{a}).$

Prema pravilu za dvostruki vektorski proizvod

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}\cdot(\vec{C}\cdot\vec{A})-\vec{C}\cdot(\vec{A}\cdot\vec{B})=(\vec{C}\cdot\vec{A})\cdot\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\cdot\vec{C}$$

dobija se

$$\operatorname{rot}(\vec{a}\times\vec{b})=(\vec{b}\,\nabla)\,\vec{a}-\vec{b}\cdot(\nabla\,\vec{a})+\vec{a}\,(\nabla\cdot\vec{b})-(\vec{a}\,\nabla)\cdot\vec{b}=$$

$$=(\vec{b}\,\nabla)\,\vec{a}-(\vec{a}\,\nabla)\,\vec{b}+\vec{a}\operatorname{div}\vec{b}-\vec{b}\cdot\operatorname{div}\vec{a}.$$

Treba napomenuti da je $(\vec{a}\,\nabla)=a_1\dfrac{\partial}{\partial x}+a_2\dfrac{\partial}{\partial y}+a_3\dfrac{\partial}{dz}$ novi operator koji se na vektor $\vec{b}$ primjenjuje ovako:

$$(\vec{a}\,\nabla)\,\vec{b}=\left(a_1\frac{\partial}{\partial x}+a_2\frac{\partial}{\partial y}+a_3\frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{b}=a_1\frac{\partial\vec{b}}{\partial x}+a_2\frac{\partial\vec{b}}{\partial y}+a_3\frac{\partial\vec{b}}{\partial z}.$$

350. $\operatorname{grad}(\vec{a}\cdot\vec{b})=\nabla(\vec{a}\cdot\vec{b})=\nabla(\overset{*}{\vec{a}}\cdot\vec{b})+\nabla(\overset{*}{\vec{a}}\cdot\vec{b}).$

Kako je

$$\vec{B}\cdot(\vec{A}\cdot\vec{C})=\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})+(\vec{A}\cdot\vec{B})\cdot\vec{C}$$

to, stavljajući $\vec{A}=\vec{a}$, $\vec{B}=\nabla$, $\vec{C}=\vec{b}$ dobija se

$$\nabla(\overset{*}{\vec{a}}\cdot\vec{b})=\vec{a}\times(\nabla\times\vec{b})+(\vec{a}\,\nabla)\,\vec{b},$$

i analogno

$$\nabla(\vec{a}\cdot\overset{*}{\vec{b}})=\vec{b}\times(\nabla\times\vec{a})+(\vec{b}\,\nabla)\cdot\vec{a}.$$

Slijedi

$$\operatorname{grad}(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\times\operatorname{rot}\vec{b}+\vec{b}\times\operatorname{rot}\vec{a}+(\vec{a}\,\nabla)\,\vec{b}+(\vec{b}\,\nabla)\,\vec{a}.$$

351. $\nabla\times(\nabla f)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z}\end{vmatrix}=\vec{0},$

jer se uzima da su drugi mješoviti izvodi funkcije f nezavisni od poretka diferenciranja, što je sigurno slučaj ako su ti izvodi neprekidni.

352. $\nabla(\nabla \times \vec{a}) = (\nabla \times \nabla)\vec{a} = 0.$

353. Pokazati da je $\operatorname{rot} f(r)\vec{r} = \vec{0}$.

Rješenje. Rezultat slijedi na osnovu zadataka 332. i 347.

354. Pokazati da je $(\vec{a}\nabla)(\vec{b}\cdot\vec{c}) = \vec{b}[(\vec{a}\nabla)\vec{c}] + \vec{c}[(\vec{a}\nabla)\vec{b}]$.

355. Izračunati div grad $\dfrac{1}{r}$. (Rezultat 0).

356. Odrediti konstante a, b, c tako da vektorsko polje

$\vec{v} = (x+2y+az)\vec{i} + (bx-3y-z)\vec{j} + (4x+cy+2z)\vec{k}$ bude

potencijalno. Naći potencijal dobijenog polja.

Rješenje. Konstante a, b, c određujemo iz uslova $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$.

No,

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x+2y+az, & bx-3y-z, & 4x+cy+2z \end{vmatrix} = (c+1)\vec{i} + (a-4)\vec{j} + (b-2)\vec{k},$$

pa je

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow c = -1,\ a = 4,\ b = 2.$$

Dakle, vektorsko polje

$$\vec{v} = (x+2y+4z)\vec{i} + (2x-3y-z)\vec{j} + (4x-y+2z)\vec{k}$$

je potencijalno.

Potencijal polja $\vec{v}$ je ona funkcija $F(x, y, z)$ za koju je grad $F = \vec{v}$. Otuda funkciju F određujemo iz uslova

$$\frac{\partial F}{\partial x} = x + 2y + 4z \tag{1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2x - 3y - z \tag{2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 4x - y + 2z. \tag{3}$$

Iz (1) slijedi

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + 2xy + 4xz + f_1(y, z). \tag{4}$$

Iz (4) se dobija

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2x + \frac{\partial f_1(y, z)}{\partial y}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 4x + \frac{\partial f_1(y, z)}{\partial z}. \tag{6}$$

Upoređujući (2) i (5), odnosno (3) i (6), dobija sc

$$\frac{\partial f_1(y, z)}{\partial y} = -3y - z \tag{7}$$

$$\frac{\partial f_1(y, z)}{\partial z} = 2z - y. \tag{8}$$

Na osnovu (7) i (8) dobija se

$$f_1(y, z) = -\frac{3y^2}{2} - zy + z^2 + C \tag{9}$$

i zatim, na osnovu (4),

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{2} - \frac{3y^2}{2} + z^2 - zy + 2yx + 4zx + C.$$

Pokazati da je polje $\vec{a}$ potencijalno i naći njegov potencijal:

357. $\vec{a} = 2(3xzy^4 - y)\vec{i} + 2(6x^2zy^3 - x)\vec{j} + 3x^2y^4\vec{k}.$

358. $\vec{a} = 2x(y^2 + z^2)\vec{i} + 2y(x^2 + z^2)\vec{j} + 2z(x^2 + y^2)\vec{k}.$

Rješenja:

357. $F(x, y, z) = 3x^2zy^4 - 2xy + C.$

358. $F(x, y, z) = x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + C.$

Pokazati da je vektorsko polje $\vec{a}$ solenoidalno i naći njegov vektorski potencijal:

359. $\vec{a} = y^3\vec{i} + z^3\vec{j} + x^3\vec{k}.$ **360.** $\vec{a} = 2x\vec{i} - y\vec{j} - z\vec{k}.$

361. $\vec{a} = (4z^2x^2 - 6y^2zx)\vec{i} + (2x^2y - 8z^2xy)\vec{j} + (3y^2z^2 - 2x^2yz)\vec{k}.$

362. $\vec{a} = -2x^2y\vec{i} - 3xz^2\vec{j} + 4xyz\vec{k}.$

363. $\vec{a} = (2y + 2xyz)\vec{i} + (6xyz - y^2z^2)\vec{j} - 3xz^2\vec{k}.$

Rješenja:

359. Uslov $\operatorname{div} \vec{a}=0$ je ispunjen, dakle, polje je solenoidalno. Vektorski potencijal polja $\vec{a}$ je vektorsko polje $\vec{b}$ tako da je

$$\vec{a}=\operatorname{rot} \vec{b}. \tag{1}$$

Komponente vektora $\vec{b}=(P, Q, R)$ određujemo iz sistema jednačina

$$\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=y^3 \tag{2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=z^3 \tag{3}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=x^3 \tag{4}$$

koji je ekvivalentan vektorskoj jednačini (1).

Kako je $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f)=\vec{0}$ (zadatak 351), to je

$$\operatorname{rot} \vec{b}=\operatorname{rot} \vec{b}+\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f)=\operatorname{rot}(\vec{b}+\operatorname{grad} f),$$

pa se može uzeti da je $R=0$, jer se može izabrati funkcija f tako da je $\frac{\partial f}{\partial z}=-R$. Sada jednačine (2), (3) i (4) postaju

$$\frac{\partial Q}{\partial z}=-y^3 \tag{5}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z}=z^3 \tag{6}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=x^3. \tag{7}$$

Iz (5) slijedi

$$Q=-y^3 z+\varphi(x, y) \tag{8}$$

a iz (6)

$$P=\frac{z^4}{4}+\psi(x, y). \tag{9}$$

Funkcije φ i ψ određujemo na osnovu (7), tj. iz

$$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x}-\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y}=x^3. \tag{10}$$

Proizvoljnost funkcija φ i ψ ograničena je jedino uslovom (10), pa možemo uzeti da je (na primjer)

$$\varphi(x, y)=\frac{x^4}{4}, \quad \psi(x, y)=0.$$

Tada je

$$P=\frac{z^4}{4}, \quad Q=-y^3 z+\frac{x^4}{4},$$

a traženi potencijal je

$$\vec{b}=\frac{z^4}{4}\vec{i}+\left(\frac{x^4}{4}-y^3 z\right)\vec{j}.$$

360. Za samostalan rad.

361. Rezonovanjem kao u zadatku 359. vektor $\vec{b}=(P, Q, 0)$, za koji je rot $\vec{b}=\vec{a}$, određuje se iz sistema jednačina

$$\frac{\partial Q}{\partial z}=6 y^2 zx-4 z^2 x^2, \quad \frac{\partial P}{\partial z}=2 x^2 y-8 z^2 xy,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=3 y^2 z^2-2 x^2 yz.$$

Dobija se

$$Q=3 y^2 z^2 x-\frac{4}{3} z^3 x^2+\varphi(x, y)$$

$$P=2 x^2 yz-\frac{8}{3} z^3 xy+\psi(x, y).$$

Funkcije φ i ψ određuju se iz jednačine

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}-\frac{\partial \psi}{\partial y}=0$$

Može se, na primjer, uzeti da je

$$\varphi(x, y)=0, \quad \psi(x, y)=0.$$

Potencijal je

$$\vec{b}=\left(2 x^2 y z-\frac{8}{3} z^3 xy\right)\vec{i}+\left(3 y^2 z^2 x-\frac{4}{3} z^3 x^2\right)\vec{j}.$$

362. Stavljajući $\vec{b}=(P, Q, 0)$ funkcije P i Q određujemo iz uslova

$$\frac{\partial Q}{\partial z}=2x^2y, \quad \frac{\partial P}{\partial z}=-3xz^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=4xyz.$$

Dobija se:

$$Q=2x^2yz+\varphi(x, y), \quad P=-xz^3+\psi(x, y),$$

pri čemu funkcije φ i ψ moraju ispunjavati uslov

$$\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x}-\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y}=0.$$

Izaberimo, radi jednostavnosti, da je $\varphi=\psi=0$. Dobija se

$$\vec{b}=-xz^3\vec{i}+2x^2yz\vec{j}.$$

363. Za samostalan rad.

Odrediti funkciju $f(x)$ tako da vektorsko polje $\vec{a}$ bude solenoidalno, a zatim naći vektorski potencijal dobijenog polja:

364. $\vec{a}=(1+x^2)f(x)\vec{i}+2xyf(x)\vec{j}-3z\vec{k}.$

365. $\vec{a}=f(x)\vec{i}+\dfrac{2xy}{1+x^2}f(x)\vec{j}-\dfrac{3z}{1+x^2}\vec{k}.$

Rješenja:

364. Funkciju $f(x)$ određujemo iz uslova div $\vec{a}=0$, tj. iz jednačine

$$(1+x^2)f'(x)+4xf(x)-3=0.$$

Izborom konstante c uzimamo da je

$$f(x)=\frac{x^3+3x}{(1+x^2)^2}.$$

Polje

$$\vec{a}=\frac{x^3+3x}{1+x^2}\vec{i}+\frac{2xy(x^3+3x)}{(1+x^2)^2}\vec{j}-3z\vec{k}$$

je solenoidalno. Komponente vektorskog potencijala $\vec{b}=(P, Q, 0)$, (rot $\vec{b}=\vec{a}$), određujemo iz jednačina

$$\frac{\partial Q}{\partial z}=-\frac{x^3+3x}{1+x^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{2xy(x^3+3x)}{(1+x^2)^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-3z.$$

Biće

$$Q=-\frac{(x^3+3x)z}{1+x^2}+\varphi(x,\ y),\quad P=\frac{2xyz(x^3+3x)}{(1+x^2)^2}+\psi(x,\ y),$$

pri čemu funkcije φ i ψ zadovoljavaju jednačinu

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial y}=0.$$

Uzimajući da je $\varphi=\psi=0$, dobija se

$$\vec{b}=\frac{2x^2yz(x^2+3)}{(1+x^2)^2}\vec{i}-\frac{xz(x^2+3)}{1+x^2}\vec{j}.$$

365. Za samostalan rad.

366. Dato je vektorsko polje $\vec{a}=\frac{f(r)}{r}\vec{r},\quad (r=|\vec{r}|)$.

a) Odrediti vrstu polja.

b) Odrediti funkciju $f(r)$ tako da polje bude Laplasovo.

c) Za dobijeno Laplasovo polje odrediti skalarni potencijal.

Rješenje. a) $\operatorname{rot}\vec{a}=\nabla\times\left[\frac{f(r)}{r}\vec{r}\right]=\vec{0}$. Polje je potencijalno.

$$\operatorname{div}\vec{a}=\nabla\left[\frac{f(r)}{r}\cdot\vec{r}\right]=3\frac{f(r)}{r}+\vec{r}\cdot\operatorname{grad}\left[\frac{f(r)}{r}\right]=$$

$$=\frac{3f(r)}{r}+\frac{d}{dr}\left[\frac{f(r)}{r}\right].$$

U opštem slučaju, dakle, $\operatorname{div}\vec{a}\neq 0$, tj. polje nije solenoidalno, pa ni Laplasovo.

b) Odredićemo funkciju $f(r)$ tako da bude $\operatorname{div}\vec{a}=0$, tj. da polje bude Laplasovo ($\operatorname{rot}\vec{a}=\vec{0}$, $\operatorname{div}\vec{a}=0$).

Iz

$$\frac{3f(r)}{r}+r\frac{d}{dr}\left[\frac{f(r)}{r}\right]=0$$

slijedi

$$\frac{r}{f(r)}\frac{d}{dr}\left[\frac{f(r)}{r}\right]=-\frac{3}{r}$$

i zatim

$$\ln\left|\frac{f(r)}{r}\right|=-3\ln r+\ln|C|$$

Znači,

$$\frac{f(r)}{r}=\frac{C}{r^3}, \quad \text{tj.} \quad f(r)=\frac{C}{r^2}.$$

Polje $\vec{a}=\frac{C}{r^3}\vec{r}$ je Laplasovo.

c) Potencijal F polja $\vec{a}=\frac{C}{r^3}\cdot\vec{r}$ određuje se iz uslova

$$\frac{C}{r^3}\cdot\vec{r}=\operatorname{grad} F.$$

Kako je

$$\operatorname{grad}\left(-\frac{C}{r}+C_1\right)=\frac{C}{r^3}\cdot\vec{r},$$

to je

$$F=-\frac{C}{r}+C_1.$$

367. Ako je polje $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$ Laplasovo, onda su komponente $a_1,\ a_2,\ a_3$ harmonijske funkcije, tj. važi $\Delta a_i=0$ $(i=1,\ 2,\ 3)$. Dokazati.

368. Ako su komponente $a_1,\ a_2,\ a_3$ polja $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$ harmonijske funkcije, tada polje $\vec{a}$ ne mora biti Laplasovo. Navesti primjer.

Rješenje. Polje $\vec{a}=\vec{r}$ ima komponente koje su harmonijske funkcije, ali zbog

$$\operatorname{div}\vec{a}=\operatorname{div}\vec{r}=3\neq 0$$

to polje ipak nije Laplasovo.